Zur Vorgeschichte der Computerstatik

Karl-Eugen Kurrer

Es wird die Vorgeschichte der Computerstatik vor der Folie des von Sybille Krämer *herausgearbeiteten Konzeptes des operativen Symbolgebrauchs gelesen. Nach einer einführenden Skizze in die Entwicklungsgeschichte der Baustatik in der Konsolidierungsperiode (1910 bis 1950) wird das* Krämer*sche Konzept vorgestellt und am Beispiel der Baustatik entfaltet. In Deutschland mündete die Rationalisierung des statischen Rechnens ein in die Erfindung des Computers durch* Zuse. *Erst mit der vollständigen Kalkülisierung der Statik mittels der Matrizenalgebra zur Matrizenstatik vollzog 1954 bis 1957* Argyris *den entscheidenden Schritt zur Computerstatik.*

1 Problemstellung

Mit der Vollendung der klassischen Baustatik im letzten Dezennium des 19. Jahrhunderts, welche die im wesentlichen durch *Louis Marie Henri Navier* (1785 bis 1836) eingeleitete Disziplinbildungsperiode dieser bauwissenschaftlichen Grundlagendisziplin abschloß, wurde gleichzeitig der Grundstein zur Vorgeschichte der Computerstatik gelegt. Es ist die Trinität der Linearität im Werkstoffverhalten (*Hooke*sches Gesetz), im Verschiebungszustand (Geometrie) und im Kraftzustand (Statik), die die Klassizität der Baustatik um 1900 charakterisiert [1]. Im Kern war es die Theorie statisch unbestimmter Systeme in Gestalt des Kraftgrößenverfahrens, das die mathematische Struktur der klassischen Baustatik offenbarte. Aus n Elastizitätsgleichungen des Kraftgrößenverfahrens (Elastizitätsgleichungen 1. Art) des n-fach statisch unbestimmten Systems mit n Gleichungen

$$-\delta_{i0} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik} \cdot X_k \qquad (1)$$

können mit den Verschiebungssprüngen δ_{ik} (i = 1, ..., n; k = 1, ..., n) und δ_{iO} (i = 1, ..., n) die n statisch unbestimmten Kraftgrößen X_k (k = 1, ..., n) bestimmt werden. Die in (1) gegebene Formulierung der Elastizitätsgleichungen des Kraftgrößenverfahrens geht auf *Heinrich Müller-Breslau* (1851 bis 1925) zurück [2].

In der Praxis des statischen Rechnens jedoch stieß das Kraftgrößenverfahren, mit dem zwar ein beliebiges statisch unbestimmtes linear-elastisches Stabwerk theoretisch berechenbar war, alsbald an seine Grenzen, da die gängigen Verfahren zur Lösung von Gleichungssystemen mit mehr als drei Unbekannten zum einen zu großen Fehlern führen können und zum anderen nur mit großem Zeitaufwand durchführbar sind. Letzteres deutete sich schon in den Beiträgen der 1880er und 1890er Jahre zur Quantifizierung der Nebenspannungen in Fachwerken mit genieteten Knoten an [3]. So ist ein einfaches, äußerlich statisch bestimmtes Balkenfachwerk mit k biegesteifen Knoten (4k - 6)-fach statisch unbestimmt. Aus diesem Grunde führte *Otto Mohr* (1835 bis 1918) 1892/93 im Anschluß an die Arbeiten *Manderla*s und *Engesser*s zur Berechnung von Nebenspannungen von einfachen Fachwerken mit k biegesteifen Knoten nicht Kraftgrößen, sondern Verschiebungsgrößen (Knotendrehwinkel, Stabdrehwinkel) als Unbekannte ein [4]. Statt n= (4k - 6) Elastizitätsgleichungen 1. Art erhält man nur m = 3k - 3 Elastizitätsgleichungen 2. Art

$$-Z_{j0} = \sum_{l=1}^{m} Z_{jl} \cdot \xi_l \qquad (2)$$

aus denen mit den Zwangskräften Z_{jl} (j = 1, ..., m; l = 1, ..., m) und Z_{jO} (j= 1, …, m) die m geometrisch unbestimmten Verschiebungsgrößen ξ_l (l = 1, ..., m) bestimmt werden können. Das *Mohr*sche Verfahren entwickelte sich – vorangetrieben durch die mit dem Stahlbetonbau aufkommenden Rahmentragwerke – Anfang der 1920er Jahre zum Verschiebungsgrößenverfahren. *Asgar Ostenfeld* hat das dual zum Kraftgrößenverfahren aufgebaute Verschiebungsgrößenverfahren im Grundriß (1920 bis 1923) geschaffen und in seiner 1926 publizierten Monographie zusammengefaßt [5]. *Ostenfeld*s Erkenntnis des dualen Baus der Baustatik bestand darin, insbesondere mit Aufstellung der Elastizitätsgleichungen 2. Art, die formale Äquivalenz beider Verfahren herausgeschält zu haben.

Gleichwohl überschritt auch das sich vorerst noch im Schatten des Kraftgrößenverfahrens sich vollendende Verschiebungsgrößenverfahren beim Lösen der Gleichungssysteme i. d. R. das Zumutbare in der Rechenpraxis. Zwar reduziert sich beispielsweise für die Berechnung eines einfachen, äußerlich statisch bestimmten Balkenfachwerkes mit k biegesteifen Knoten die Anzahl der Unbekannten um

$$n - m = (4k - 6) - (3k - 3) = k - 3,$$

gleichwohl ist der Rechenaufwand zur Lösung eines Gleichungssystems mit (3k - 3) Unbekannten noch immer aufwendig und fehleranfällig.

Für die Praxis des statischen Rechnens bildeten sich daher in der Konsolidierungsperiode der Baustatik (1910 bis 1950) spezielle Verfahren heraus, die eine rationelle Gestaltung der Handrechnung erlaubten:

- graphostatische Verfahren
- Orthogonalisierungsverfahren
- spezielle Verfahren aus der Theorie der linearen Gleichungssysteme
- baustatische Iterationsverfahren.

Auf der theoretischen Ebene ist die Erkenntnis des dualen Baus der Baustatik in Kraftgrößenverfahren einerseits und Verschiebungsgrößenverfahren andererseits charakteristisch für die Konsolidierungsperiode der Baustatik [6]. Die Schaffung des dualen Erkenntnissystems der Baustatik und die Rationalisierung des statischen Handrechnens sind die beiden Ausgangspunkte der Automatisierung des statischen Rechnens, mithin die Eckpfeiler der Vorbereitungsperiode der Computerstatik (1930 bis 1950). Mit der umfassenden Kalkülisierung der Statik durch die Matrizenalgebra in den frühen 1950er Jahren schließlich entsteht die moderne Strukturmechanik – vorerst in Gestalt der Computerstatik. Dieser folgenschwere Paradigmenwechsel im formalen Operieren mit Symbolen vom Symbol als Variable zum Kalkülzeichen ist Schlußstein der Vorgeschichte der Computerstatik und Grundstein der modernen Strukturmechanik.

2 Allgemeine Bemerkungen zum operativen Symbolgebrauch in der Baustatik

Die Vorgeschichte der Computerstatik wird im folgenden vor der Folie des von *Sybille Krämer* aus der Entwicklungsgeschichte arithmetischer, algebraischer und logischer Kalküle [7] herausgearbeiteten Konzeptes des operativen Symbolgebrauchs gelesen. Aus der Perspektive dieser philosophischen Theorie des Geistes hat *Krämer* auch die analytische Geometrie [8], den *Leibnitz*schen Infinitesimalkalkül [9] und die Vorgeschichte der Informatik [10] sowie das kognitionswissenschaftliche Paradigma [11] kritisch gewürdigt. Kerngedanke der Idee der Formalisierung ist „der schematische, interpretationsfreie Umgang mit schriftlichen Symbolen“ [7, S. 176]. Ihre Grundidee besteht darin, „das Manipulieren von Symbolreihen von ihrer Interpretation abzutrennen“ mit dem Ziel, „den Verstand zu entlasten von den Mühen der Interpretation“ [7, S. 176]. Formales Operieren ist nicht nur an den schriftlichen Gebrauch von Symbolen gebunden; es bringt auch die Linearisierung der Wahrnehmung mit sich. Formalem Operieren ist der schematische Gebrauch von Symbolen eingeschrieben: „Während wir Zeichenreihen bilden und umbilden“, schreibt *Sybille Krämer*, „müssen wir uns dabei verhalten, als ob wir eine Maschine wären“ [7, S. 178].

Ihrer historischen Rekonstruktion der Idee der Formalisierung legt *Sybille Krämer* zwei systematische Thesen zugrunde:

These 1:

Ein Vorgang ist formal beschreibbar, sofern es möglich ist, diesen mit Hilfe künstlicher Symbole so darzustellen, daß die Bedingungen des typographischen, schematischen und interpretationsfreien Symbolgebrauchs erfüllt sind. Ein Vorgang, welcher diesen Bedingungen genügt, kann auch als Operation einer symbolischen Maschine ausgeführt werden [7, S. 2].

These 2:

Jeder Vorgang, der formal beschreibbar ist, kann als Operation einer symbolischen Maschine dargestellt und – im Prinzip – von einer wirklichen Maschine (z. B. mechanische Rechenmaschine) ausgeführt werden. Computer sind Maschinen, die jede beliebige symbolische Maschine imitieren können [7, S. 3].

„Bevor der Computer als wirkliche Maschine erfunden wurde“, resümiert *Sybille Krämer* ihr methodisches Prolegomena zur Genese des operativen Symbolgebrauchs, „entwickelten wir den ‘Computer in uns’“ [7, S. 4]. Wie *Sybille Krämer* diese langwierige und mühevolle Geschichte des operativen Symbolgebrauchs für die o. g. mathematischen Disziplinen nachzeichnet, soll hier der Versuch unternommen werden, die relevanten Quellen aus jener Perspektive für die Vorgeschichte der Computerstatik zu interpretieren.

Ist die Übertragung des *Krämer*schen Konzeptes auf nichtmathematische Disziplinen wie etwa die Technikwissenschaften legitimierbar? Um diese Frage zu beantworten, muß zuerst die Ausformung der Technikwissenschaften zu einem Wissenschaftszweig mit eigenständigem epistemologischen Status herausgeschält werden. Die Technikwissenschaften entfalteten sich historisch-logisch in vier Schritten:

Erster Schritt:

Erkenntnis des im technischen Modell (z. B. Balkenmodell) verwirklichten Kausalzusammenhanges (Entstehung erster technikwissenschaftlicher Grundlagendisziplinen, z. B. *Navier*sche Balkentheorie).

Zweiter Schritt:

Konstruktive und technologische Modellierung von Kausalzusammenhängen in technischen Gebilden und Verfahren (klassischer Techniktyp, z. B. Fachwerkkonstruktionen).

Dritter Schritt:

Von der Koexistenz der Erkenntnis des im technischen Modell verwirklichten Kausalzusammenhanges mit der konstruktiven bzw. technologischen Modellierung von Kausalzusammenhängen in technischen Gebilden und Verfahren zur Kooperation (Entstehung des Systems der klassischen Technikwissenschaften, z. B. Bemessungstheorien des konstruktiven Ingenieurbaus).

Vierter Schritt:

Die raumzeitliche Integration der Erkenntnis des im technischen Modell objektiv existierenden Kausalkomplexes mit der konstruktiven und technologischen Modellierung des Kausalkomplexes im technischen System (Automation und die Herausbildung nichtklassischer technikwissenschaftlicher Disziplinen, z. B. Matrizenstatik / moderne Strukturmechanik).

Aus der historischen Entwicklung der Baustatik läßt sich tatsächlich die Tendenz zu formal beschreibbaren Vorgängen erschließen, die eine mathematische Theorie auf technikwissenschaftlicher Ebene abbilden:

In der von *Müller-Breslau* in die Theorie statisch unbestimmter Systeme eingeführte δ-Symbolik (vgl. (1)) offenbart sich die Theorie linearer Gleichungssysteme.

Auch die formal der δ-Symbolik folgende Z-Symbolik *Ostenfeld*s (vgl. (2)) nutzt die Erkenntnis der linearen Struktur der klassischen Baustatik; obwohl sie die duale Konstruktion der gesamten Baustatik ermöglicht, überschreitet sie vorerst noch nicht die durch die Theorie linearer Gleichungssysteme auferlegte Grenze.

In der Abbildung der Theorie linearer Gleichungssysteme auf die einzelwissenschaftliche Ebene der Baustatik bestand das formale Operieren mit Symbolen im formalen Operieren mit Variablen (Symbole für Symbole), das nur auf eine Teilmenge des gesamten Bereichs kognitiver Objekte der Baustatik Bezug nahm (Inhomogenität des operativen Symbolgebrauchs). Dem entsprach in der Praxis des statischen Rechnens die Anwendung mechanischer Rechenhilfsmittel, beispielsweise der mechanischen Rechenmaschine – also spezieller symbolischer Maschinen.

Der durch die Berechnung hochgradig statisch unbestimmter Systeme induzierte Rationalisierungsdruck auf das statische Rechnen führte ab Mitte der 1930er Jahre zur schrittweisen Realisation des Computers durch *Konrad Zuse* (1910 bis 1995). Obwohl 1941 mit der Z3 der erste lauffähige Computer geschaffen wurde, mit der jede symbolische Maschine imitiert werden konnte, haben *Zuses* Computer die Anwender in erster Linie als technisches Instrument des rationellen technisch-wissenschaftlichen Rechnens im Sinne der numerischen Auswertung von Formeln begriffen. Die Inhomogenität des operativen Symbolgebrauchs in der Baustatik, d. h. die Koexistenz verschiedener formaler Sprachen (Infinitesimalkalkül, Algebra, Arithmetik), konnte somit nicht aufgehoben werden: Auf formeller Ebene hinkte die baustatische Theoriebildung hinter der technischen Entwicklung her.

Erst mit der bewußt auf den Computer abgestellten matrizenalgebraischen Reformulierung der Baustatik (Homogenisierung des operativen Symbolgebrauchs in der Baustatik allein durch die Matrizenalgebra) wurde der Übergang zur vollständigen Kalkülisierung der Baustatik vollzogen. Im Unterschied zur Theorie der Gleichungssysteme haben in der Matrizenalgebra die Variablen die Funktion von Kalkülzeichen, d. h. sie sind Grundzeichen einer formalisierten Sprache; somit ist die Stufe des deutungsfreien Symbolgebrauchs erreicht. Derartige Symbole haben eine intrasymbolische Bedeutung, da die Regeln, vermittels derer die symbolischen Ausdrücke formiert und transformiert werden, keinen Bezug auf die Bedeutung der Symbole nehmen. Ihr Interpretationsbereich ist prinzipiell nicht festgelegt (vgl. [7, S. 182]). Damit ist auch der Grund genannt, weshalb die Matrizenstatik alsbald in die moderne Strukturmechanik mündete.

3 Rationalisierung des statischen Rechnens

Um 1910 galt die Baustatik im System der klassischen Technikwissenschaften als jene Disziplin, in der die Mathematisierung am weitesten fortgeschritten war. Ihre Grundlagen fanden in umfangreichen Beiträgen Eingang in der von *Felix Klein* (1849 bis 1925) herausgegebenen „Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften“. Unbestritten war ihre Rolle als Königsdisziplin der Bauwissenschaften insofern als sie die Legitimation der Wissenschaftlichkeit des konstruktiven Ingenieurbaus wesentlich konstituierte. Die Legitimation der Wissenschaftlichkeit durch Mathematisierung technikwissenschaftlicher Grundlagendisziplinen avancierte in den 1890er Jahren zum argumentativen Baustein der Bewegung für die Gleichstellung der Technischen Hochschulen mit den Universitäten. So wurde der Vollender der klassischen Baustatik, *Müller-Breslau*, 1901 zum ordentlichen Mitglied der Preußischen Akademie der Wissenschaften ernannt, deren Mitgliedschaft bislang nur die universitäre Wissenschaft repräsentierte.

Mit der Mathematisierung der Baustatik ist aber nur die formale Voraussetzung der Rationalisierung des statischen Rechnens auf theoretischer Ebene benannt.

Die praktische Ebene formierte sich mit der durch den Eisenbau induzierten Industrialisierungswelle des Bauens im letzten Drittel des 19. Jahrhunderts. In den Konstruktionsbüros der großen Eisenbauanstalten erweiterte sich im Zuge des Aufbaus der Theorie statisch unbestimmter Systeme der Umfang der statischen Berechnung. Befördert wurde diese Entwicklung durch die sich herausbildende Modellwelt der Strichstatik (d. h. der Gesamtmenge der statischen Systeme der klassischen Baustatik), die erstmals das rechnende Bauen in der Arbeit des konstruktiv tätigen Bauingenieurs in ihr Recht einsetzte. Er war nunmehr in der Lage, neue Konstruktionsformen aus der Synthese statischer Subsysteme zu (er)finden (Beispiel: *Zimmermann*kuppel). Der konstruktive Bauingenieur im Eisenbau wandelte sich so immer mehr zum Statiker, der die Wahrheit der Konstruktionen auf die Richtigkeit des statischen Nachweises zu reduzieren versteht. So wird die Rationalisierung des statischen Rechnens nicht nur zum wesentlichen Moment der Rationalisierung der konstruktiven Bauingenieurarbeit überhaupt, sondern zur Triebfeder der Theoriebildung in der Konsolidierungsperiode der Baustatik, mithin zum wesentlichen Inhalt der Vorgeschichte der Computerstatik.

3.1 Von der graphischen Statik zur Graphostatik

In seiner 1866 veröffentlichten „Graphischen Statik" [12] hat *Karl Culmann* (1821 bis 1881) den Grundstein für die graphische Statik und die Graphostatik gelegt. Während *Culmann* das Theorieprogramm der graphischen Statik explizit formulierte und für seine Durchsetzung in der polytechnischen Lehre und Ingenieurpraxis stritt, enthält seine Monographie noch den Kern des Theorieprogramms der Graphostatik, welches in seiner historisch-logischen Entfaltung in der Vollendungsphase der Disziplinbildungsperiode der klassischen Baustatik (1875 bis 1890) die mit dem Anspruch nach mathematischer Begründung mittels der projektiven Geometrie auftretende graphische Statik negieren sollte. Ähnlich der Maschinenkinematik von *Reuleaux* ist das Theorieprogramm der graphischen Statik der Versuch, das klassische Wissenschaftsideal für die sich formierenden Technikwissenschaften zu retten, um die durch sie erfolgte Technisierung mathematisch-naturwissenschaftlicher Theoriefragmente in Form der Abbildung von unvollständigen Zeichenmengen rückgängig zu machen. So setzte sich in der Ingenieurpraxis nicht die graphische Statik, sondern die von *Culmann* vehement bekämpfte Graphostatik durch, weil nur sie in der Lage war, das Entwurfs- und Konstruktionshandeln im Graphischen zu verdichten, mithin die Ingenieurarbeit zu rationalisieren. Es war der schon in *Culmann*s graphischer Integrationsmaschine (Rückführung der Balken- auf die Seilstatik) angelegte Arbeitsmittelcharakter der Graphostatik, welcher diese im Bereich der Analyse und Synthese von Tragstrukturen in der Vollendungsphase der Disziplinbildungsperiode der Baustatik – der klassischen Baustatik – zu einer modernen Proportionslehre des Bauingenieurs werden ließ.

*Culmann*s „Graphische Statik" ist dual aufgebaut. Im Text mit Formeln und holzgeschnittenen Textabbildungen entwickelt er die graphische Statik auf Basis der projektiven Geometrie explizit und die Graphostatik implizit, wohingegen die Lithographien des Anhangs durch graphische Repräsentationen der Ingenieurpraxis beherrscht werden. Der wesentliche Unterschied ist jedoch, daß *Culmann* den Text und die Formeln nicht bloß ins Graphische übersetzt, sondern sein Hybrid aus Geometrie und Statik geometrisch begründen will (graphische Statik), gleichzeitig aber in der Graphostatik ein Modell für die Rationalisierung der Ingenieurarbeit über ihre Geometrisierung entwickelt, d. h. die episteme (i. S. von Erkenntnis) und die techne (i. S. von Verfahren) parallelisiert. Das Scheitern des *Culmann*schen Theorieprogrammes ist letztlich darin zu suchen, daß mit der Graphostatik die techne nicht den Status einer episteme erreicht, und die graphische Statik als episteme im wesentlichen auf sich selbst verwiesen war.

Obwohl die Graphostatik in der Vollendungsphase der Disziplinbildungsperiode der Baustatik eine enorme kognitive Erweiterung erfuhr und in dieser Zeit (1875 bis 1890) das Entwurfs- und Konstruktionshandeln des Bauingenieurs bestimmte, verlor sie nach 1900 schnell an Bedeutung, da ihre Rationalisierungspotenzen gegenüber der auf der linearen Algebra basierenden Strichstatik erschöpft waren und sie nur einen unwesentlichen Beitrag zur Verwissenschaftlichung der Ingenieurarbeit leisten konnte. Auch die Graphostatik erreichte die 2. Stufe des formalen Operierens (Symbole als Variablen) nur auf der Ebene der Geometrisierung mechanischer Zusammenhänge (Kraft- und Seilpolygon), da sich ihre Rationalisierungspotenz ja gerade in der graphischen Repräsentation der Einheit von Entwurf, Bemessung und Konstruktion entfaltete: In jeder technischen Proportionslehre sind die graphischen Symbole Stellvertreter für Objekte, herrscht also die 1. Stufe des formalen Operierens (Symbole als Stellvertreter von Objekten) vor. Die graphische Statik dagegen tendierte dazu, die graphischen Symbole im Sinne der projektiven Geometrie schematisch zu benutzen und sie von der Last der Interpretation zu befreien. Dennoch konnte sie die 2. Stufe des formalen Operierens nur partiell erreichen, da ihre graphische Symbolsprache sich nur für spezielle statisch unbestimmte Systeme eignete.

3.2 Tendenzen der Kalkülisierung der klassischen Baustatik

Wie mächtig der Einfluß der Graphostatik auf das Entwurfs- und Konstruktionshandeln der Bauingenieure wirkte, davon gibt die ab 1887 publizierte und mehrere Bände umfassende „Graphische Statik der Baukonstruktionen" (z.B. [13]) *Heinrich Müller-Breslau*s einen Eindruck. Obwohl dieses Hauptwerk der klassischen Baustatik weit über die Graphostatik hinausgreift, hat *Müller-Breslau* auch für die nachfolgenden Bände diesen Titel beibehalten. Der theoretischen Grundlegung der klassischen Baustatik durch das Prinzip der virtuellen Kräfte bzw. dem Energieprinzip zum Trotz, hält er die Graphostatik nach wie vor für wichtig.

Auch *Müller-Breslau*s Werk ist dual aufgebaut. Im Text mit Formeln und Textabbildungen entwickelt er – und dies ist der Unterschied zu *Culmann* – die Theorie der statisch unbestimmten Fachwerke vollständig auf einem einzigen Prinzip: dem Prinzip der virtuellen Kräfte, und hegemonisiert die Idee des formalen Operierens mit algebraischen Symbolen in Form der Elastizitätsgleichungen in der Fachwerktheorie. Zahlenbeispiele für einschlägige zeichnerische Verfahren der Graphostatik bereitet er im Text vor und gibt ihre Konstruktion in lithographierten Tafeln an. Diese zeichnerischen Verfahren der Graphostatik sind nunmehr bloße techne und Ergänzung zur rationellen Analyse von Fachwerken: Die Graphostatik ist nunmehr rezepturförmig, bar jedweder Möglichkeit zur technikwissenschaftlichen Erkenntnis. Bei den nach 1900 im Stahlbetonbau und dann auch im Stahlbau sich durchsetzenden Rahmensystemen, spielte sie fast keine Rolle mehr.

Das sich mathematisch im Interpretationsbereich der linearen Algebra vollziehende formale Operieren mittels algebraischer Symbole der Baustatik hat die zeichnerischen Verfahren der Graphostatik bis auf Restbestände verdrängt. Entscheidendes Indiz hierfür ist *Müller-Breslau*s Übertragung seiner Formalisierung der Elastizitätsgleichungen von Fachwerken auf Rahmensysteme im Jahre 1908 [14]. Und auch dies firmiert noch unter dem Titel „Die graphische Statik der Baukonstruktionen" – mit nur zwei Lithographien im Anhang!

Martin Grüning hebt 1925 die Fachwerktheorie, die Rahmentheorie und die Trägertheorie in seiner Statik des ebenen Tragwerkes auf [15], indem er sich nur noch auf das ideale technische Objekt der Strichstatik bezieht, und vom Realobjekt der Baustatik vollständig Abschied genommen hat. Im Text wird die lineare Algebra der Baustatik noch ohne Verwendung des Matrizenkalküls entwickelt und in Textabbildungen versinnbildlicht, Zahlenbeispiele mit Hilfe zeichnerischer Verfahren der Graphostatik gelöst, fehlen. Letztere finden sich in Kompendien für Baugewerks- bzw. Staatsbauschüler. Die symbolische Repräsentation im Graphischen hat sich vollständig zur Modellwelt der Strichstatik metamorphiert mit der dahinter sich verbergenden Repräsentation in Symbolen der linearen Algebra.

Die Baustatik der Konsolidierungsperiode reflektierte partiell auf ihre linear-algebraischen Grundlagen und erreichte im disziplinären Umfang die 2. Stufe des formalen Operierens: Die linear-algebraischen Symbole der Baustatik galten für die graphischen Symbole der statischen Systeme, die ihrerseits bautechnische Realobjekte symbolisch repräsentierten. Dennoch scheint sich mit der von *Müller-Breslau* eingeführten und durch die Berliner Schule der Baustatik international verbreiteten δ- Symbolik (vgl. [15]) der Übergang von der 2. zur 3. Stufe des formalen Operierens (Übergang vom formalen Operieren mit Symbolen vom Symbol als Variable zum Kalkülzeichen) anzubahnen.

Der auf den Allgemeinen Arbeitssatz zurückgehende Satz von *Maxwell* und *Betti*

$$\delta_{jm} = \delta_{mj} \qquad (3)$$

besteht formal im Vertauschen der Indizes. Sucht man etwa die Einflußlinie η_m für die Verschiebung w_j infolge der Wanderlast „1" in m eines Durchlaufträgers, d. h.

$$\eta_m = \eta_{jm}, \qquad (4)$$

wo beim δ- Symbol der linke Index Art, Ort und Wirkung und der rechte Index die Ursache der Größe bedeuten, so werden mit (3) die Indizes formal vertauscht und dann als Biegelinie infolge der Einzellast „1" in j interpretiert:

$$\delta_{mj} = w_j \qquad (5)$$

Ursache und Wirkung haben sich formal vertauscht und dem Allgemeinen Arbeitssatz gemäß substantiell verändert, indem sich die Einflußlinie (4) in eine spezielle Zustandslinie – die Biegelinie (5) – verwandelt hat: Die mit (4) vollzogene Transformation der Ursache-Wirkungs-Beziehung in eine Mittel-Zweck-Beziehung [16, S. 78], die techne, „reflektiert" sich mit (3) in der durch (5) vollzogenen Transformation der Zweck-Mittel-Beziehung in eine Wirkungs-Ursache-Beziehung [16, S. 77], die episteme. Das δ-Symbol hat insofern die Funktion eines Kalkülzeichens, als es zum Grundzeichen der unvollständig formalisierten Sprache der Berliner Schule der Baustatik avancierte und den durch sie abgesteckten Geltungsbereich der Einfluß- und Zustandsgrößen repräsentierte. Die Einflußgröße (z. B. die Einflußlinie η_m in (4)) und die Zustandsgrößen (z. B. die Biegelinie w_j in (5)) sind algebraische Symbole und gehören der 2. Stufe des formalen Operierens an. Zwar können mit dem δ-Symbol symbolische Ausdrücke formiert und transformiert werden und sind insofern intrasymbolisch, als die Regel (3) keinen Bezug auf die Bedeutung des δ-Symbols nimmt; die Symboltransformation aber ist nur unter der Voraussetzung der Interpretation der Eingangs- und Ausgangssymbole als algebraische Symbole der 2. Stufe des formalen Operierens im Sinne der klassischen Baustatik möglich: Der Interpretationsbereich der δ-Symbolik ist also prinzipiell festgelegt, d. h. die Homogenisierung des operativen Symbolgebrauchs erreicht noch nicht den disziplinären Umfang der Baustatik. Das δ-Symbol ist mithin ein technikwissenschaftliches Pseudokalkülzeichen. Mit diesen Einschränkungen hat in der Baustatik die techne den Status der episteme prinzipiell erlangt.

3.2.1 Orthogonalisierungsverfahren

Die systematische Nutzung der δ-Symbolik erlaubt die Konstruktion von Verfahren, in denen die Elastizitätsgleichungen 1. Art (1) vollständig entkoppelt sind, also

$$\delta_{ik} = 0 \text{ für } i \neq k \qquad (6)$$

gilt. Ein solches Verfahren hat *Müller-Breslau* bereits 1889 und 1897 angegeben und in seiner „Graphischen Statik" 1903 am Beispiel mehrfach statisch unbestimmter Fachwerksysteme expliziert. Motiv seines Orthogonalisierungsverfahrens war die Fehlerempfindlichkeit des allgemeinen Kraftgrößenverfahrens für das i. a. die Beziehung (6) nicht erfüllt ist. Bei einem äußerlich zweifach statisch unbestimmten Fachwerk wählt *Müller-Breslau* die Richtung der statisch Unbestimmten X_1 willkürlich und zeichnet für den Zustand $X_1 = 1$ einen Verschiebungsplan; insbesondere ermittelt er die Verschiebung des Angriffspunktes von $X_1 = 1$. X_2 läßt er alsdann senkrecht auf diese Verschiebungsrichtung wirken, so daß $\delta_{21} = 0$, mithin nach dem Satz von *Maxwell-Betti* (3) auch $\delta_{12} = 0$ gilt. Den Hintergrund dieses Verfahrens bildet die kinematische Fachwerktheorie. Bei „höherem Grade statischer Unbestimmtheit erfordert dieses Verfahren indessen eine gewisse Übung in der Darstellung der Geschwindigkeitszustände zwangsläufiger kinematischer Ketten und auch eine gewisse Erfindungsgabe, sobald für die gerade vorliegende Aufgabe eine recht einfache Lösung verlangt wird" [17, S. 23]. Für mehrfach statisch unbestimmte symmetrische Systeme jedoch fand es zusammen mit dem Begriff des elastischen Schwerpunkts nach 1900 Eingang in die Rechenpraxis.

Das Verfahren von *Müller-Breslau* regte *Siegmund Müller* zu seinem Verfahren der Gruppenlasten für n-fach statisch unbestimmte Systeme an [17]. Mathematisch läuft es auf die Zerlegung des Kraftzustandes des n-fach statisch unbestimmten Systems in n voneinander unabhängige Linearkombinationen hinaus. Dabei werden die Kraftgruppenzustände so gewählt, daß die Bedingung (6) erfüllt ist. Statisch interpretiert *Müller* die Kraftgruppenzustände als Zustände bei veränderlichen Hauptsystemen mit ansteigender statischer Unbestimmtheit: $X_1 \rightarrow$ statisch bestimmtes Hauptsystem, $X_2 \rightarrow$ 1fach statisch unbestimmtes Hauptsystem, ..., $X_i \rightarrow$ (i - 1)fach statisch unbestimmtes Hauptsystem, ..., $X_n \rightarrow$ (n - 1)fach statisch unbestimmtes Hauptsystem. Aus der klaren Erkenntnis der mathematischen Struktur des Kraftgrößenverfahrens und dem extensiven formalen Umgang mit der δ-Symbolik glaubt *Müller* ein allgemeingültiges Orthogonalisierungsverfahren geschaffen zu haben, dessen Anwendung weder die Erfindungsgabe des Rechners erforderte noch „kinematische Angliederungen" [17, S. 25] benötigte: ein untrügliches Zeichen der Tendenz zum schematischen und interpretationsfreien Symbolgebrauch in der Konsolidierungsperiode der Baustatik.

3.2.2 Spezielle Verfahren aus der Theorie der linearen Gleichungssysteme

Hertwig und *Pirlet* interpretierten die im letzten Abschnitt vorgestellten Verfahren von *Müller-Breslau* und *Müller* konsequent aus der Perspektive der Theorie der Gleichungssysteme – speziell der Determinantentheorie; davon ausgehend entwickelten sie weitere baustatische Lösungsverfahren [18], [19]. So konstruiert *Hertwig* in der mathematischen Sprache der Determinantentheorie vier Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems (1) [18]:

1) Allgemeine Lösung durch Substitution
2) Lösung durch Elimination
3) Lösung durch Substitution und Elimination
4) Lösung durch lineare Substitution mit konstantem Glied.

Das erstgenannte Verfahren entspricht dem von *Müller*, wohingegen jenes von *Müller-Breslau* ein Sonderfall des drittgenannten Verfahrens ist. Das letztgenannte Verfahren läuft bei Durchlaufträgern auf das für derartige Systeme oft eingesetzte graphische Verfahren der Fixpunkte hinaus. Die Verfahren 1) bis 4) vergleicht *Hertwig* unter dem Gesichtspunkt des Rechenaufwandes und der Fehlerempfindlichkeit. Aber keines der Verfahren bietet entscheidende Vorteile. Deshalb deutet *Hertwig* am Schluß seines Aufsatzes ein Verfahren an, das „am bequemsten und sichersten zum Ziele führt" [18, S. 120]: In einer zwei Jahre später veröffentlichten Arbeit entwickelt er die Koeffizienten der zur δ_{ik}-Matrix gehörenden Kehrmatrix in unendliche konvergente Reihen [20]. *Hertwig* erkennt klar das Allgemeine seines Verfahrens, er schreibt: „Natürlich läßt sich das Rechenverfahren noch bei anderen Aufgaben anwenden, die auf die Lösung linearer Gleichungen führen, z. B. bei Ersatzstabverfahren, bei der Berechnung elektrischer Leitungsnetze" [20, S. 59]. Hier scheint die Chance der Kalkülisierung technikwissenschaftlicher Disziplinen durch formalisierte Ingenieurverfahren durch. Die Arbeit des *Hertwig*-Schülers *Pirlet* [19] nutzt den Grundgedanken des *Müller*schen Verfahrens und die *Gauß*sche Eliminationsmethode, die extensiv in der Geodäsie und Astronomie angewandt wird. *Pirlet* geht sogar so weit, die von *Gauß* in die Fehler- und Ausgleichsrechnung eingeführte Symbolik für die Theorie statisch unbestimmter Systeme zu übernehmen.

Fast zwei Jahrzehnte später behandelte *Hertwig* in seinem umfangreichen Beitrag „Die Statik der Baukonstruktionen" für das „Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik" die gesamte Theorie der statisch unbestimmten Systeme einheitlich aus der Perspektive der Theorie der linearen Gleichungssysteme [21]. Gleichwohl verharrte er mathematisch i. w. auf der Ebene der Determinantentheorie, ergänzt durch Iterationsverfahren. Trotz Einsicht in den dualen Charakter der Baustatik vollzog *Hertwig* nicht den letzten Schritt zur vollständigen Kalkülisierung der Baustatik mittels der Matrizenalgebra.

3.3 Der duale Bau der Baustatik

Die Schaffung des Verschiebungsgrößenverfahrens – und damit verbunden die Erkenntnis der dualen Struktur der Baustatik – bildete den folgenreichsten Erkenntnisfortschritt dieser bauwissenschaftlichen Grundlagendisziplin in ihrer Konsolidierungsperiode. Der von *Mohr* seit 1874/75 für Fachwerke erfolgreich angewandte Allgemeine Arbeitssatz barg „zwei Seelen in einer Brust": das Prinzip der virtuellen Kräfte (PdvK) als Grundlage des Kraftgrößenverfahrens und das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PdvV) als Grundlage des Verschiebungsgrößenverfahrens. In der Theorie der statisch unbestimmten Systeme und der Praxis des statischen Rechnens jedoch erlangte das Kraftgrößenverfahren, begründet durch das PdvK, ob nun unmittelbar oder mittelbar in Gestalt der *Castigliano*schen Theoreme (2. Satz von *Castigliano*), alsbald die beherrschende Stellung; dies ist i. w. der durch die δ-Symbolik angelegten Tendenz zur Kalkülisierung der Baustatik geschuldet. Obwohl *Mohr* und dessen Schüler *Robert Land* (1857 bis 1899) auch die fundamentale Rolle des PdvV erkannten, verharrten die ersten Ansätze zum Verschiebungsgrößenverfahren auf der 2. Stufe des formalen Operierens. Ein Grund hierfür ist sicherlich, daß die Formulierung mit Gleichgewichtsbedingungen gegenüber dem PdvV präferiert wurde, weil diese dem Ingenieur geläufiger ist. So nutzte *Ostenfeld* für die Berechnung der Zwangskräfte des Gleichungssystems (2) die Gleichgewichtsbedingungen. Gleichwohl hat die mit dem Kraftgrößenverfahren eng verknüpfte δ-Symbolik das Verschiebungsgrößenverfahren formell antizipiert, mithin *Ostenfeld*s „Deformationsmethode" erst ermöglicht.

Ludwig Mann arbeitete 1927 das Verschiebungsgrößenverfahren vor dem mathematischen Hintergrund der „Mécanique analytique" (1788) *Joseph Louis Lagrange*s (1736 bis 1813) durch [22]. *Mann* führte für die unbekannten Verschiebungsgrößen ξ_i in (2) den Begriff „Grundkoordinate" ein, der eine Spezifikation der *Lagrange*schen verallgemeinerten Koordinaten ist. Für die Berechnung der Zwangskräfte von (2) setzte er erstmals das PdvV ein. Auch hier folgte er *Lagrange*, gründete doch dieser die gesamte Mechanik auf dem PdvV. Schließlich nannte *Mann* das Gleichungssystem (2) „Elastizitätsgleichungen 2. Art". So folgte die Entwicklung des Verschiebungsgrößenverfahrens formell vorerst dem Kraftgrößenverfahren. Eine Chance der Kalkülisierung der Baustatik aus der Perspektive des Verschiebungsgrößenverfahrens, den formellen Status des Kraftgrößenverfahrens zu erreichen, ergab sich erst mit der 1938 veröffentlichten Arbeit von *Arno Schleusner*, der eine klare begriffliche Scheidung des PdvK vom PdvV für kleine Verschiebungen vor dem Hintergrund der Variationsrechnung vorgenommen hat [23]. Dennoch beherrschte das Kraftgrößenverfahren nicht nur weiter die Theorie statisch unbestimmter Systeme, sondern auch die Praxis des statischen Rechnens. So richtete sich das Interesse der rechnenden Bauingenieure weniger auf die Kalkülisierung der gesamten Baustatik als auf die Entwicklung und Anwendung baustatischer Iterationsverfahren.

3.4 Baustatische Iterationsverfahren

Schon in den frühen 1920er Jahren zeichnete sich der Widerspruch zwischen dem Gebrauchswert der Theorie statisch unbestimmter Systeme für die Rechenpraxis und der konstruktiven Praxis im Stahlbetonbau, aber auch im Stahlbau, ab. So kamen im Stahbetonbau zunehmend mehrstöckige Rahmen auf. Solche Systeme sind hochgradig statisch unbestimmt und selbst mittels der gängigen, auf dem Kraftgrößenverfahren fußenden Methoden nur mit hohem Zeitaufwand berechenbar. In geringerem Maße gilt dies auch für das Verschiebungsgrößenverfahren, bei dem sich zwar i.d.R. weniger zu lösende Gleichungen ergaben, das aber in der Praxis des statischen Rechnens vorerst randständig blieb, ist der Bauingenieur doch primär an Kraftgrößen interessiert. Natürlich leisteten hier die im zweiten und dritten Dezennium in zahlreichen Monographien veröffentlichten Rahmentafeln nicht zu unterschätzende Dienste; gleichwohl blieb der Umgang des Rechners mit solchen hochgradig statisch unbestimmten Systemen subjektiv.

Einen großen Schritt in der Objektivierung des statischen Rechnens vollzog *Hardy Cross* 1930. Sein Iterationsverfahren stieß in der Fachwelt schnell auf große Resonanz. 1932 wurde sein Aufsatz in den „Transactions" der „American Society of Civil Engineers" zusammen mit über 30 Diskussionsbeiträgen und einer abschließenden Bewertung der Diskussionsbeiträge durch *Cross* nachgedruckt. *Cross* leitet seinen Beitrag mit folgenden Worten ein: „The purpose of this paper is to explain briefly a method which has been found useful in analyzing frames which are statically indeterminate. The essential idea which the writer wishes to present involves no mathematical relations except the simplest arithmetic" [24, S. 1]. Der Verstand des Anwenders des Verfahrens von *Cross* wurde von den Mühen der Interpretation insofern entlastet, als er unmittelbar dem operativen Symbolgebrauch der Arithmetik zu folgen hatte: Kenntnisse über die Theorie statisch unbestimmter Systeme waren nicht erforderlich. Die Grundformeln für die notwendigen drei statischen Größen wie Stabendmoment, Stabsteifigkeit und Fortleitungszahl waren nicht nur elementar, sondern in den gängigen Statikkompendien leicht nachschlagbar.

Mit seinem Verfahren hatte *Cross* in den 1930er und 1940er Jahren zahlreiche Aktivitäten ausgelöst, die die Konstruktion baustatischer Iterationsverfahren zum Gegenstand hatten. Als Beispiel sei das 1949 von *Gaspar Kani* veröffentlichte Verfahren genannt [25], das – im Gegensatz zu *Cross* – auch die Knotenverschieblichkeit berücksichtigte. Während *Cross* als Iterationsvorschrift das Summationsverfahren verwendet, iteriert *Kani* nach dem Einzelschrittverfahren (*Gauß-Seidel*); dadurch ist das Verfahren von *Kani* auch im Rechentechnischen dem von *Cross* überlegen.

Iterationsverfahren nach *Cross* und *Kani* spielten in der Praxis des statisch unbestimmten Rechnens bis in die 1970er Jahre eine bedeutsame Rolle. Damals war aber der Wettlauf zwischen statischer Handrechnung und Automatisierung des statischen Rechnens, zwischen Hase und Igel, schon längst entschieden.

3.5 Der Beitrag Zuses zur Automatisierung des statischen Rechnens

Den Ausgangspunkt der Computerentwicklung in Deutschland bildete die aus dem Kraftgrößenverfahren in Form der δ-Symbolik gefaßte numerische Analyse hochgradig statisch unbestimmter Systeme.

Der Berliner Bauingenieurstudent *Konrad Zuse* hatte 1934 in einer von Professor *Pohl* betreuten Studienarbeit ein 9fach statisch unbestimmtes System zu berechnen. Um den Rechengang zu formalisieren, befaßte sich *Zuse* zunächst mit der Schematisierung der Rechenformulare mit dem Ziel, daß dort nur die Zahlen (Eingangswerte) eingesetzt werden. Der auf arithmetischen Grundoperationen fußende Rechenablauf sollte sich dann aus dem Aufbau der Formulare von selbst ergeben, möglichst so, daß nebeneinanderstehende Zahlen zu multiplizieren, untereinanderstehende zu addieren und Festwerte (Formelkonstante) gleich an der richtigen Stelle vorgedruckt standen [26, S. 165]. Schon bald nach seinem Eintritt in die Statikabteilung der *Henschel*-Flugzeugwerke AG, 1935, fand er seine Idee der Automatisierung des statischen Rechnens praktisch bestätigt. So formierten und verallgemeinerten sich *Zuse*s Gedanken in den Jahren 1934 bis 1936 schrittweise zu einer automatischen Rechenmaschine [27].

Schon 1935 beschloß er, seine volle Arbeitskraft dem Bau einer solchen Maschine zu widmen: er kündigte bei *Henschel* und wurde Computererfinder [26, S. 31].

In seinem Manuskript „Die Rechenmaschine des Ingenieurs“ vom 30.01.1936 spricht er vom „Rechenplan“, mit dem sich jede beliebig lange Rechnung schematisieren läßt, „indem im voraus die aufeinanderfolgenden Rechenoperationen dem Charakter und der Reihe nach aufgezeichnet werden, und die im Verlauf der Rechnung auftretenden Zahlen fortlaufend numeriert, oder nach einem anderen Schema geordnet werden, ohne sie zunächst der Größe nach zu bestimmen“ [28, S. 3]. *Zuse* schlußfolgert: „Der Ingenieur braucht Rechenmaschinen, die diese Rechenoperationen automatisch ausführen, indem der Rechenplan auf einem Lochstreifen festgehalten wird, der die Befehle für die einzelnen Rechenoperationen selbsttätig und nacheinander an die Maschine gibt“ [28, S. 3].

Damit hat *Zuse* den Grundgedanken zu einer Maschine formuliert, mit der jede beliebige symbolische Maschine imitiert werden kann. Aus der Analyse der Arbeit des Berechnungsingenieurs konkretisiert *Zuse* den Inhalt der Rechenpläne in hierarchischer Gliederung am Beispiel des Flugzeugbaus: Gesamtplan, Plangruppen (z. B. statisch unbestimmtes Stabwerk) und Einzelpläne. Beispielsweise enthält die Plangruppe „Statisch unbestimmtes Stabwerk“ Einzelpläne wie:

- Entwicklung der Maße und Bestimmung der Stabkomponenten
- Berechnung der Steifigkeit
- Stabkräfte am statisch bestimmten System als Funktion der statisch Unbestimmten
- Berechnung der Verschiebungssprünge δ_{io} und δ_{ik}
- Lösung des Gleichungssystems (1), d. h. Berechnung der statisch Unbestimmten X_k
- Berechnung der Stabkräfte am statisch unbestimmten System
- Kontrolle.

Die in einem Plan auftretenden Größen teilt *Zuse* ein in Ausgangswerte, Zwischenwerte, Resultatwerte, Kontrollwerte und Konstanten. „Bei der Aufstellung des Gesamtplans, also der Einteilung in Plangruppen und Einzelpläne ist es nötig, scharfe Disziplin in den Ausgangs- und Resultatwerten zu halten. Sie sind die Fäden, die die einzelnen Pläne miteinander verbinden. (...). Die Beziehung der Pläne untereinander müssen wie elektrische Stecker aneinander passen“ [28, S. 10-11]. Mit diesen Bemerkungen antizipierte *Zuse* schon wesentliche Seiten der Gliederung von Programmsystemen in Programme und Unterprogramme.

Aber *Zuse* blieb nicht bei der Analyse und Synthese der Intellektualtechnik des Berechnungsingenieurs stehen. Er lotete auch die Möglichkeiten der Maschine aus. Diese bestünden nicht nur in der Rationalisierung von gängigen Rechenverfahren des Ingenieurs (z. B. auch dem „Einbau" von Profiltafeln des Stahlbaus in die Maschine), sondern auch in der Entwicklung neuer Methoden zur Lösung technischer Probleme und in der Erschließung von Gebieten, die bisher der Rechnung nicht zugänglich waren [28, S. 12].

Mit den beiden letztgenannten Möglichkeiten benannte *Zuse* den inneren Zusammenhang von Computerentwicklung und technikwissenschaftlicher Theoriebildung. Als Beispiel der Entwicklung neuer Methoden zur Lösung technischer Probleme führte er die Nutzbarmachung der in den 1920er und 1930er Jahre durch die Mechanik auf dem Gebiete der Plastizitätstheorie und Aerodynamik gewonnenen Erkenntnisse für die Bemessung im Flugzeugbau an. Dadurch würde „die Gedankenarbeit des Theoretikers gewissermaßen konserviert"; der Ingenieur bezöge „die Formel gewissermaßen ab Fabrik" und bräuchte damit die sie begründende Theorie nicht zu kennen [28, S. 20]. Für technische Gebiete, in denen bislang Fortschritte nur durch kostspielige Versuche erzielt werden konnten wie etwa dem Motorenbau, sieht *Zuse* die Möglichkeit, diese durch den Computer der Rechnung zu erschließen [28, S. 23].

Während sich *Zuse* nach 1936 der technischen Realisation des Computers widmete, blieb die von ihm erhoffte Wechselwirkung zwischen Computerentwicklung und technikwissenschaftlicher Theoriebildung in Deutschland bis weit in die 1950er Jahre aus. Selbst der Förderer seines Projektes seit 1940, der Flugzeugstatiker *Alfred Teichmann* von der Deutschen Versuchsanstalt in Berlin-Adlershof und spätere Ordinarius für Statik an der TU Berlin betrachtete, auch nach 1950 den Computer als bloßes Rationalisierungsmittel des statischen Rechnens (vgl. [29]), nicht erkennend, daß mit ihm eine Reformulierung der gesamten Baustatik mittels des Matrizenkalküls technisch möglich wurde.

4 Der Durchbruch zur modernen Strukturmechanik: Die matrizenalgebraische Reformulierung der Statik

*Zuse*s Metapher von den Beziehungen der Rechenpläne untereinander, die wie elektrische Stecker aneinanderpassen müssen, fand in der von *Argyris* formulierten Matrizentheorie der Statik [30], [31] auf einzelwissenschaftlicher Ebene ihren formellen Ausdruck; Voraussetzung hierfür war die historisch-logische Koinzidenz mit der Realisation des Computers in den 1940er Jahren. Als universelle symbolische Maschine ist der Computer in der Lage für jedes schriftliche Zeichensystem, welches kognitive Objekte repräsentiert, Aussagen über diese Objekte durch algorithmische Manipulationen des betreffenden Zeichensystems zu gewinnen. Ein solches spezielles schriftliches Zeichensystem ist die Matrizenalgebra. So ist die Matrizenstatik gleichzeitig Computerstatik, deren Kunstgriff darin besteht, das statische Rechnen so zu organisieren, daß es nahezu ohne tieferes Eindringen in die theoretischen Grundlagen durchführbar ist. Der historische Zeitraum von der Konstruktion des Matrizenbegriffs bis zu ersten Anwendungen in der Flugzeugstatik umfaßte 100 Jahre.

4.1 Der Matrizenkalkül in der Mathematik und theoretischen Physik

Ausgehend vom durch *Sylvester* 1850 in die Theorie der linearen Gleichungssysteme eingeführten Matrizenbegriff schuf dessen Freund und Kollege *Cayley* 1858 den Matrizenkalkül. *Cayley* erkannte, daß sich das symbolische Operieren mit linearen Transformationen auf einige wenige Grundoperationen mit den Koeffizientenschemata, den Matrizen der Transformationen, zurückführen läßt. Symbolische Operationen, die *Cayley* in Anlehnung an die Arithmetik als Addition, Multiplikation und Division von Matrizen definiert.

Das symbolische Operieren mit linearen Transformationen wird so zum Rechnen mit Matrizen, wodurch das ganze ausgedehnte und vielgestaltige Gebiet linearer Beziehungen nicht nur beträchtlich an Übersichtlichkeit und an Leichtigkeit in Form und Inhalt gewinnt, sondern die Matrizenrechnung – gerade durch das Kalkülhafte – zum Mittel der Erkenntnis (episteme), zu einer Kunst (im Sinne von techne) des Findens neuer Erkenntnisse in der Natur- und Technikwissenschaft avanciert. Bis zum Ende des 19. Jahrhunderts formen insbesondere *B. Peirce*, *C.S. Peirce*, *Frobenius* und *Hermite* den Matrizenkalkül für innermathematische Anwendungen zu einer geschlossenen mathematischen Disziplin aus [32, S. 255].

Erst 1926 sollte in der Quantenmechanik *Born*s, *Heisenberg*s und *Jordan*s der Matrizenkalkül die entscheidende Rolle bei der Formalisierung einer nichtmathematischen Disziplin spielen, die sich anschickte das klassische physikalische Weltbild aufzuheben. Nicht ohne Grund nannte man diese Richtung der Quantenphysik „Matrizenmechanik", um nämlich auszudrücken, daß sie einerseits formell eine Mechanik der Matrizen, ein Operieren mit Matrizen darstellt und sich andererseits inhaltlich von der klassischen Mechanik unterscheidet. Wie ein Vierteljahrhundert später in der zur Matrizenstatik sich wandelnden Statik der Matrizenkalkül zum Mittel der Erkenntnis wurde, synthetisierte er in der historisch-logischen Entwicklung der Quantenphysik der späten 1920er die techne mit der episteme.

4.2 Eingang des Matrizenkalküls in die Technikwissenschaften

Erste Ideen zur Anwendung von Matrizen in der Baustatik äußerte *Edward Study* schon 1903 (vgl. [33], [34]).

Sie gerieten jedoch in Vergessenheit, da die mit dem Stahlbetonbau sich entwickelnde Theorie der Rahmentragwerke sich erst ein Jahrzehnt später konstituierte und alsdann aus der Praxis des statisch unbestimmten Rechnens Formalisierungsbedarf gegenüber der baustatischen Theoriebildung entstand; der Bedarf des Stahlbetonkonstrukteurs an baustatischen Rechenhilfsmitteln wurde weitgehend durch die in diesen Jahren sehr zahlreich editierten „Rahmenwerke" (Monographien über die in der Praxis gängigen Rahmentragwerke, die fertige Formeln enthielten) befriedigt. Auch der sich in den 1910er Jahren in scharfer Konkurrenz zum Stahlbetonbau fortbildende Stahlbau erzeugte nur wenig Druck in Richtung Kalkülisierung der Baustatik. Gleichwohl griff die Baustatik schon früh die aus der Praxis des statischen Rechnens in beiden konstruktiven Disziplinen resultierenden Probleme mit höhergradig statisch unbestimmten Systemen auf; als typisches Beispiel sei hier nur die sich über die 1910er Jahr erstreckende Debatte in „Der Eisenbau", „Beton und Eisen" und „Armierter Beton" über den *Vierendeel*träger genannt. So spielte sich das symbolische Operieren mit linearen Transformationen in der Baustatik nicht auf der Ebene der Matrizenalgebra, sondern der Theorie linearer Gleichungssysteme ab.

Das Rechnen mit Matrizen sollte in den Technikwissenschaften zuerst in der Elektrotechnik bei der Berechnung elektrischer Netzwerke Eingang finden. Hier ragen die in den 1930er und 1940er Jahren veröffentlichten Arbeiten von *Kron*, *Quade* und *Feldtkeller* heraus. Leider vermengte *Kron* den Tensorkalkül mit dem Matrizenkalkül. So hat die Einführung der Matrizenrechnung in die Elektrotechnik durch einige wenig glückliche Veröffentlichungen einen ungünstigen Start gehabt [35, S. 347].

4.3 Eingang des Matrizenkalküls in die Ingenieurmathematik

Einen Markstein in der Nutzung des Matrizenkalküls bildete *Zurmühl*s 1950 publizierte Monographie „Matrizen. Eine Darstellung für Ingenieure" [35]. Der promovierte Ingenieur *Zurmühl* erkannte, daß sich die lineare Algebra mit dem Matrizenkalkül ein Ausdrucksmittel geschaffen hatte, mit dessen Hilfe die in der Physik und den Technikwissenschaften vorherrschenden linearen Beziehungen auf einheitlich faßbare, in der gewöhnlichen Formelsprache jedoch nur schwerfällig darstellbare Operationen durch Formeln von unübertrefflicher Kürze und Sinnfälligkeit wiedergegeben werden können, die den Blick stets auf das Wesentliche lenken [35, S. I].

Die Matrizentheorie wird sich „in der Ingenieurmathematik mehr und mehr durchsetzen und darin vielleicht bald eine ähnliche Rolle spielen wie etwa die ja heute nicht mehr hinwegzudenkende Vektorrechnung" [35, S. I]. *Zurmühl*s Vision sollte alsbald real werden, denn schon in den 1950er Jahren avancierte *Zurmühl*s Monographie zum Standardwerk der Ingenieurmathematik. *Zurmühl*s Buchprojekt wurde seit 1945 von *Alwin Walther* (1898 bis 1967) durch Erprobung numerischer Verfahren und Beschaffung schwer zugänglicher Literatur unterstützt. Am von *Walther* geleiteten Institut für Praktische Mathematik der TH Darmstadt (IPM) befaßte sich *Zurmühl* zu Beginn der 1940er Jahre mit einem matriziell formulierten Iterationsverfahren, das er am Beispiel der Berechnung eines hochgradig statisch unbestimmten räumlichen Fachwerkes erprobte [35, S. 282].

Bereits vor dem Krieg war *Walther*s IPM als „Rechenfabrik" bezeichnet worden, und 1939 hatten bis zu 70 Rechnerinnen mit mechanischen Tischrechenmaschinen die Berechnung von Aufgaben aus Ballistik, Leichtbau, Funkortung, aber auch Optik bearbeitet [36, S. 226]. Damit war die Kopfarbeit des technisch-wissenschaftlichen Rechnens schematisiert und von der Ingenieurarbeit vollständig getrennt. Was lag näher, als diese Rechenarbeit zu automatisieren, wie schon *Zuse* 1936 forderte?

An dem von *Walther* in den Dienst für die Kriegsforschung gestellten IPM wurden deshalb schon 1943 Pläne für eine große und leistungsfähige automatische programmgesteuerte Rechenanlage diskutiert, die aus Teilen gängiger Rechenmaschinen zusammengebaut werden sollte. Unter dem Eindruck der Nachricht von *Aikens* großer ASSC Mark I-Maschine erteilte das Oberkommando der Wehrmacht für *Walther*s Projekt höchste Dringlichkeitsstufe, so daß er die für den Zusammenbau der Maschine benötigten Teile beschlagnahmen lassen und in kürzester Zeit realisieren konnte. Wenige Tage später versank die neue Anlage mit dem IPM in den Bombentrümmern [36, S. 228]. Auf Vermittlung von Professor *Herbert Wagner*, Leiter der „Sonderabteilung F" der *Henschel*-Flugzeugwerke AG - und in dieser Funktion Vorgesetzter *Zuse*s (*Zuse* leitete seit 1940 die Gruppe „Statik") - kam der Kontakt *Walther*s mit *Zuse* Ende 1942 zustande [27].

Der Pionier der Flugzeugstatik und geniale Rechenkünstler *Wagner* hatte die universelle Bedeutung von *Zuse*s Rechner erkannt und tatkräftig gefördert. Bei *Walther*, der damals den Computer in erster Linie als technisches Instrument des rationellen technisch-wissenschaftlichen Rechnens im Sinne der numerischen Auswertung von Formeln begriff, wollte sich *Zuse* mit dem Thema „Theorie des Allgemeinen Rechnens" promovieren. *Zuse*s Promotion blieb leider ein Torso. *Petzold* vermutet, daß es nicht ohne Probleme gewesen sei, eine derartige Arbeit bei *Walther* unterzubringen, der der Anschauung analoger Technik den Vorrang gab [36, S. 197].

4.4 Ein baustatisches Matrizenverfahren: Das Übertragungsverfahren

Gleichwohl hatte *Walther* mit der Forderung von *Zurmühl* die heuristische Kraft des Matrizenkalküls für die Physik und die technikwissenschaftlichen Grundlagendisziplinen erkannt. So konnte zu Beginn der 1950er Jahre das Darmstädter Promotionsvorhaben *Fuhrke*s zur Bestimmung von Balkenschwingungen mit Hilfe des Matrizenkalküls abgeschlossen werden [37].

Noch größere Bedeutung für die Baustatik erlangte das von *Falk* 1956 geschaffene Übertragungsverfahren zur Berechnung von beliebig gestützten Durchlaufträgern, das die Lösung der Balkendifferentialgleichung vollständig in die Sprache des Matrizenkalküls übersetzt [38]. Das Übertragungsverfahren „lebt" nur durch Matrizenoperationen und führt bei Durchlaufträgern auf Systeme von höchstens zwei linearen Gleichungen. Der Grad der statischen bzw. geometrischen Unbestimmtheit tritt bei dem zur Gruppe der „Reduktionsverfahren" zu zählenden Übertragungsverfahren nicht in Erscheinung; wesentlich werden vielmehr die topologischen Eigenschaften des statischen Systems. Für das Übertragungsverfahren ist somit die durch das Kraft- und Verschiebungsverfahren bedingte duale Struktur der Baustatik unwesentlich.

Das Übertragungsverfahren war sowohl für das Handrechnen als auch für das Rechnen mit dem Computer geeignet; auf letzteres hat *Falk* hingewiesen [38, S. 231]. So nutzte der Verfasser 1981 ein auf dem PC implementiertes mit der FE-Methode gekoppeltes erweitertes Übertragungsverfahren (Spannungstheorie II. Ordnung, Berücksichtigung der Dehnsteifigkeit) für die Berechnung von Bogentragwerken. Dennoch blieb die Reichweite des Übertragungsverfahrens wie andere Reduktionsverfahren in Theorie und Praxis der Baustatik beschränkt, da sich die matrizielle Kalkülisierung nur auf eine Teilmenge von statischen Systemen erstreckte.

4.5 Computer + Statik = Computerstatik = Matrizenstatik

Die Kalkülisierung der Statik konnte nur dann allgemein sein, wenn sich die Theorie und Praxis des statischen Rechnens eng mit dem Computer verband. Dies bedeutet, daß der operative Symbolgebrauch in der **gesamten** Statik die Form **einer** symbolischen Maschine annehmen mußte, die ihrerseits durch den Computer als Realisation einer universellen symbolischen Maschine leicht imitiert werden konnte.

Mittel der Kalkülisierung der Statik, d. h. der Entwicklung der Statik zur Computerstatik, war die Matrizenalgebra. Die Gleichsetzung der Computerstatik mit der Matrizenstatik deutet auf die o. g. Imitation einer speziellen symbolischen Maschine durch den Computer hin. Der erste Schritt hin zur Matrizenstatik erfolgte nicht im Bauingenieurwesen, sondern im Flugzeugbau, wo die Berechnung von hochgradig statisch unbestimmten Systemen zum Alltagsgeschäft des Berechnungsingenieurs gehörte.

Levy nutzte 1947 den Matrizenkalkül für das Kraftgrößenverfahren zur Berechnung von komplizierten Flugzeugstrukturen [39], *Lang* und *Bisplinghoff* [40], *Langefors* [41] sowie *Wehle* und *Lansing* [42] bauten 1951/52 die von *Levy* geschaffenen theoretischen Grundlagen aus und entwickelten die Matrizenformulierung des Kraftgrößenverfahrens (flexibility method). In der Geburtsurkunde der FE-Methode 1956 ausgefertigt von *Turner*, *Clough*, *Martin* und *Topp* liest man hierzu den Satz: „The method is, of course perfectly general. However, the computational difficulties become serve if the structure is highly redundant, and the method is not particularly well adapted to the use of high-speed computing machines" [43, S. 806]. Offensichtlich bemerkte dies *Levy* selbst, denn er veröffentlichte schon 1953 die Matrizenformulierung des Verschiebungsverfahrens (stiffness method) [44]. Auch hierzu äußerten sich die Schöpfer der FE-Methode kritisch: „In a recent paper *Levy* has presented a method of analysis for highly redundant structures which is particularly suited to the use of high-speed digital computing machines" [43, S. 807].

Wird in diesem Zitat formal *Levy* durch *Argyris*, method durch general method und particularly durch generally ersetzt, so erhält man eine Bewertung der matrizenalgebraischen Reformulierung der gesamten Statik durch *Argyris* in den Jahren 1954 bis 1957 [30], [31].

Die über 80 Druckseiten umfassende Aufsatzserie in der Zeitschrift „Aircraft Engineering" [30] basiert auf den seit 1950/51 am Imperial College in London gehaltenen Vorlesungen von *Argyris*; sie wird durch folgende Sätze eingeleitet: „The increasing complexity of Aircraft structures and the many exact or approximate methods available for their analysis demand an integrated view of the whole subject, not only in order to simplify their applications but also to discover some more general truths and methods. There are also other reasons demanding a more comprehensive discussion of the basic theory. We mention only the increasing attention paid to temperature stresses and the realization of the importance of nonlinear effects. When viewed from all these aspects the idea of presenting a unified analysis appears more than necessary" [30, S. 347].

Aus seiner beispiellosen historisch-logischen Rekonstruktion der Disziplinbildungs- und Konsolidierungsperiode der Baustatik sowie der Elastizitätstheorie konstruiert *Argyris* die Grundlagen der Strukturmechanik, entfaltet sie in der dualen matrizenalgebraischen Darstellung des Kraft- und Verschiebungsgrößenverfahrens und veranschaulicht die Kraft des symbolischen Operierens mit dem Matrizenkalkül am Beispiel komplexer Tragstrukturen des Flugzeugbaus [30]:

- Historisch akzentuierte Einleitung
- Grundgleichungen der Kontinnumsmechanik (Gleichgewichtsbeziehungen)
- Arbeit und Ergänzungsarbeit, Formänderungsenergie und Formänderungsergänzungsenergie
- Prinzip der virtuellen Verschiebungen (PdvV) einschließlich des 1. Satzes von *Castigliano*, des Prinzips vom Minimum des Gesamtpotentials (*Dirichlet, Green*) sowie des *Rayleigh-Ritz*-Verfahrens und der *Galerkin*-Methode
- Beispiele zum PdvV (Zweifeldträger mit nichtlinearer Federlagerung, statisch unbestimmtes Stabwerk, offener Rohrquerschnitt unter Torsionsbelastung)
- Prinzip der virtuellen Kräfte (PdvK) einschließlich des 2. Satzes von *Castigliano* und des Prinzips vom Minimum des Komplementärpotentials (*Menabrea*)
- Beispiele zum PdvK
- Anwendungen des PdvV und PdvK auf temperaturbeanspruchte mechanische Systeme sowie auf Torsionsprobleme unter Berücksichtigung nichtlinearer Spannungs-Dehnungs-Beziehungen
- Theorie statisch unbestimmter Systeme in matrizenalgebraischer Formulierung: Flexibilität des Systems (Nachgiebigkeitsmatrix), Steifigkeit des Systems (Steifigkeitsmatrix), Verschiebungsgrößenverfahren, Dualität des Kraft- und Verschiebungsgrößenverfahrens
- Anwendung des Kraftgrößenverfahrens im Flugzeugbau (z. B. Schubflußverteilung in mehrzelligen Tragflügelquerschnitten).

1957 erweiterte *Argyris* die Theorie statisch unbestimmter Systeme in matrizenalgebraischer Formulierung zur Matrizenstatik [31]. *Argyris* benennt seine Motive: „Wir sind uns schon seit einigen Jahren bewußt, daß keine der gewöhnlichen statischen Methoden wirklich geeignet ist, die Spannungsverteilung und die Nachgiebigkeitsmatrizen der hochgradig statisch unbestimmten Systeme der modernen Luftfahrtkonstruktionen zu bestimmen. Ähnliche Schwierigkeiten treten auch in anderen Anwendungsgebieten der Statik auf. Die Iterationsverfahren können in gewissen Fällen nützlich sein, sind aber im allgemeinen zu langwierig und haben sich nicht bei den membran- und schalenförmigen Tragwerken der Luftfahrt bewährt. Diese Schwierigkeiten können wir mit der Matrizenformulierung der Statik in Verbindung mit dem elektronischen Digitalautomaten überwinden. Die Matrizenformulierung erlaubt es nicht nur, die Rechnungen viel übersichtlicher zu gestalten, sondern ist auch die ideale Schreibweise für den Digitalautomaten. Außerdem sind die theoretischen Ableitungen der Matrizentheorie so durchsichtig und elegant, daß neue und praktisch wertvolle Beziehungen, die in der gewöhnlichen Schreibweise unmöglich oder nur schwierig erkennbar wären, sich jetzt sehr einfach ergeben" [31, S. 174].

Für alle statischen Berechnungen sind jetzt nur drei prinzipiell einfache Matrizen sowie eine Spaltenmatrix der Lasten erforderlich. Mit der Matrizenstatik können auch nichtlinear-elastische und dynamische Probleme analysiert werden. *Argyris* bildet die duale Struktur der gesamtem Statik (PdvK/Kraftgrößenverfahren, PdvV/Verschiebungsgrößenverfahren) in synoptischer, matrizenalgebraischer Formulierung ab, und legt dieser Darstellung ein Wörterbuch der operativen Begriffe zugrunde (siehe Tabelle u.).

Mit dieser Arbeit ist *Argyris* eine **vollständige** Kalkülisierung der Statik gelungen.

Damit kann erstmals die **gesamte** Statik als spezielle symbolische Maschine in Form der Matrizenstatik begriffen werden, die ohne weiteres von einer universellen symbolischen Maschine – dem Computer – **vollständig** imitiert werden kann. So ist die Matrizenstatik von *Argyris* gleichzeitig Computerstatik; mehr noch: sie ist aufgrund ihres Kalkülcharakters Strukturmechanik, da die Unterscheidung nach Anwendungsgebieten hinfällig ist.

Kraftgrößenverfahren	Verschiebungsgrößenverfahren
Kraft (Spannung)	Verschiebung (Verzerrung)
Verschiebung (Verzerrung)	Kraft (Spannung)
$Nachgiebigkeit = \dfrac{Verschiebung}{Kraft}$	$Steifigkeit = \dfrac{Kraft}{Verschiebung}$
Einheitslastgesetz	Einheitsverschiebungsgesetz
statisch bestimmte Tragwerke	kinematisch bestimmte Tragwerke
Nachgiebigkeit des Tragwerkes	Steifigkeit des Tragwerkes
Nachgiebigkeitsmatrix	Steifigkeitsmatrix
.	.
.	.

Den praktisch tätigen Ingenieuren in Deutschland wird die sich stürmisch entwickelnde Computerstatik erst 1965 durch den umfassenden Literaturbericht von *Klöppel* und *Friemann* in der VDI-Zeitschrift bekannt [45]. Im selben Jahr veröffentlicht *Worch* im Beton-Kalender eine Einführung in das elektronische Rechnen in der Baustatik [46]. Bis zur Integration der Computerstatik in das Bauingenieurstudium in deutschen Landen verging ein weiteres knappes Jahrzehnt: Erst damit hat das rechnende Bauen nicht nur an Tiefe der theoretischen Durchdringung, sondern auch an Breite der Anwendung eine neue Qualität gewonnen.

Literatur

[1] *Kurrer, K.-E.*: Zur Genese der Kontroverse um die klassische Baustatik. Dresdener Beiträge zur Geschichte der Technikwissenschaften Heft 21 (1993), S. 14-25.

[2] *Müller-Breslau, H.*: Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen. 2. verm. u. verb. Aufl. Leipzig: Baumgärtner's Buchhandlung, 1893.

[3] *Kurrer, K.-E.*: Zur Geschichte der Theorie der Nebenspannungen in Fachwerken. Bautechnik 62 (1985), H. 10, S. 325-330.

[4] *Mohr, O.*: Die Berechnung der Fachwerke mit starren Knotenverbindungen. Zivilingenieur (1892), S. 577-594 und (1893), S. 67-78.

[5] *Ostenfeld, A.*: Die Deformationsmethode. Berlin: Verlag von Julius Springer, 1926.

[6] *Kurrer, K.-E.*: Das Verhältnis von Bautechnik und Statik. Bautechnik 62 (1985), H. 1, S. 1-4.

[7] *Krämer, S.*: Symbolische Maschinen. Die Idee der Formalisierung in geschichtlichem Abriß. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1988.

[8] *Krämer, S.*: Über das Verhältnis von Algebra und Geometrie in Descartes' „Géomètrie". Philosophia naturalis Bd. 26 (1989), H. 1, S. 19-40.

[9] *Krämer, S.*: Zur Begründung des Infinitesimalkalküls durch Leibnitz. Philosophia naturalis Bd. 28 (1991), H. 2, S. 117-146.

[10] *Krämer, S.*: Operative Schriften als Geistestechnik. Zur Vorgeschichte der Informatik. In: Informatik und Philosophie, hrsgn. v. *P. Schefe, H. Hastedt, Y. Dittrich, G. Keil*, S. 69-83. Mannheim: BI-Wissenschaftverlag, 1993.

[11] *Krämer, S.*: Denken als Rechenprozedur: Zur Genese eines kognitionswissenschaftlichen Paradigmas. Kognitionswissenschaft (1991), H. 2, S. 1-10.

[12] *Culmann, K.*: Die graphische Statik. Zürich: Verlag von Meyer & Zeller, 1866.

[13] *Müller-Breslau, H.*: Die graphische Statik der Baukonstruktionen. 3. wesentl. verm. Aufl., Band II. Erste Abteilung. Leipzig: Baumgärtner's Buchhandlung, 1903.

[14] *Müller-Breslau, H.*: Die graphische Statik der Baukonstruktionen. Band II. Zweite Abteilung. Leipzig: Baumgärtner's Buchhandlung, 1908.

[15] *Grüning, M.*: Die Statik des ebenen Tragwerkes. Berlin: Verlag von Julius Springer, 1925.

[16] *Kurrer, K.-E.*: Philosophische Überlegungen zum Begriff der Technikwissenschaften. Blätter für Technikgeschichte 51./52. Heft (1989/90), S. 67-82.

[17] *Müller, S.*: Zur Berechnung mehrfach statisch unbestimmter Tragwerke. Zentralblatt der Bauverwaltung (1907), H. 4, S. 23-27.

[18] *Hertwig, A.*: Über die Berechnung mehrfach statisch unbestimmter Systeme und verwandte Aufgaben in der Statik der Baukonstruktionen. Zeitschrift für Bauwesen (1910), S. 109-120.

[19] *Pirlet, J.*: Die Berechnung statisch unbestimmter Systeme. Der Eisenbau 1 (1910), H. 9, S. 331-349.

[20] *Hertwig, A.*: Die Lösung linearer Gleichungssysteme durch unendliche Reihen und ihre Anwendung auf die Berechnung hochgradig unbestimmter Systeme. In: Festschrift Heinrich Müller-Breslau, hrsgn. v. *A. Hertwig* und *H. Reissner*, S. 37-59. Leipzig: Alfred Kröner Verlag, 1912.

[21] *Hertwig, A.*: Die Statik der Baukonstruktionen. In: Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik. Band IV - 1. Hälfte, hrsgn. v. *F. Auerbach* und *W. Hort*, S. 1-80. Leipzig: Verlag von Johann Ambrosius Barth, 1931.

[22] *Mann, L.*: Theorie der Rahmentragwerke auf neuerer Grundlage. Berlin: Verlag von Julius Springer, 1927.

[23] *Schleusner, A.*: Das Prinzip der virtuellen Verrückungen und die Variationsprinzipien der Elastizitätstheorie. Der Stahlbau 11 (1938), H. 24, S. 185-192.

[24] *Cross, H.*: Analysis of continuous frames by distributing fixed-end moment. Transactions of American Society of Civil Engineers, Vol. 96 (1932), S. 1-156.

[25] *Kani, G.*: Die Berechnung mehrstöckiger Rahmen. Stuttgart: Verlag Konrad Wittwer, 1949.

[26] *Zuse, K.*: Der Computer. Mein Lebenswerk. 3. unveränderte Aufl. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[27] Gespräch des Verfassers mit *Konrad Zuse* v. 16.01.1995 in Hünfeld.

[28] *Zuse, K.*: Die Rechenmaschine des Ingenieurs. Berlin: Maschinenschriftl. Manuskript v. 30.01.1936.

[29] *Teichmann, A.*: Statik der Baukonstruktionen III. Statisch unbestimmte Systeme. Berlin: Walter de Gruyter, 1958.

[30] *Argyris, J. H.*: Energy Theorems and Structural Analysis. Aircraft Engineering, Vol. 26 (1954), pp. 347-394, pp. 410-422, Vol. 27 (1955), pp. 42-58, pp. 80-94, pp. 125-134, pp. 145-158.

[31] *Argyris, J. H.*: Die Matrizentheorie der Statik. Ingenieur-Archiv, 25. Band (1957), S. 174-192.

[32] *Wußing, H.*: Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1979.

[33] *Corradi, L.*: On the developments of computational mechanics. Meccanica, Vol. 19 (1984), pp. 76-85.

[34] *Norris, C. H., Wilbur, J. B.*: Elementary structural analysis. 2nd Ed. New York: McGraw-Hill, 1960.

[35] *Zurmühl, R.*: Matrizen. Eine Darstellung für Ingenieure. Berlin: Springer-Verlag, 1950.

[36] *Petzold, H.*: Moderne Rechenkünstler. Die Industrialisierung der Rechentechnik in Deutschland. München: Verlag C. H. Beck, 1992.

[37] *Fuhrke, H.*: Bestimmung von Balkenschwingungen mit Hilfe des Matrizenkalküls.Ingenieur-Archiv, 23. Band (1955), S. 329-348.

[38] *Falk, S.*: Die Berechnung des beliebig gestützten Durchlaufträgers nach dem Reduktionsverfahren. Ingenieur-Archiv, 24. Band (1956), S. 216-232.

[39] *Levy, S.*: Computation of influence coefficients for aircraft structures with discontinuities and sweepback. Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 14 (1947), pp. 547-560.

[40] *Lang, A. L., Bisplinghoff, R. L.*: Some results of sweepback wing structural studies. Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 18 (1951), pp. 705-717.

[41] *Langefors, B.*: Analysis of elastic structures by matrix transformation with special regard to semimonocoque structures. Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 19 (1952), pp. 451-458.

[42] *Wehle, L. B., Lansing, W.*: A method for reducing the analysis of complex redundant structures to a routine procedure. Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 19 (1952), pp. 677-684.

[43] *Turner, M. J., Clough, R. W., Martin, H. C., Topp, L. J.*: Stiffness and deflection analysis of complex structures. Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 23 (1956), pp. 805-824.

[44] *Levy, S.*: Structural analysis and influence coefficients for delta wings. Journal of the Aeronautical Sciences, Vol. 20 (1953), pp. 449-454.

[45] *Klöppel, K., Friemann, H.*: Die Statik im Zeichen der Anpassung an elektronische Rechenautomaten. VDI-Z 107 (1965), H. 3, S. 1603-1607.

[46] *Worch, G.*: Elektronisches Rechnen in der Baustatik. Eine Einführung. In: Beton-Kalender, II. Teil, S. 319-384. Berlin: Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, 1965.

Autor dieses Beitrages:

Dr.-Ing. Karl-Eugen Kurrer ist Chefredakteur der Zeitschrift STAHLBAU beim Verlag Ernst & Sohn.